Werner Kratz
Marius Hofert

Universität Ulm
Wintersemester 2008/2009
30.10.2008

Übungen zur Analysis 2

Blatt 4

Abgabe und Besprechung, Donnerstag, den 06.11.2008

Aufgabe 17 (4 Punkte)

Zeige:

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha+1)n^{-(\alpha+1)}\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha}=1 \text{ für alle } \alpha\geq 0, \text{ d.h. } \sum_{k=1}^{n}k^{\alpha}\sim\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \text{ für } n\to\infty.$$

Hinweis

Verwende den Riemannschen Zwischensummensatz.

Aufgabe 18 (Bogenlänge) (5 Punkte)

Für eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ und eine Zerlegung $Z=\{x_0,\ldots,x_n\}$ von $[a,b]$ definieren wir

$$l(Z):=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(f(x_k)-f(x_{k-1}))^2}.$$

(a) Interpretiere anhand einer Skizze die geometrische Bedeutung von $l(Z)$.

(b) Nun sei $f\in C^1[a,b]$ und (Z_m) eine Folge von Zerlegungen mit $\mu(Z_m)\to 0$ $(m\to\infty)$. Zeige: $\lim\limits_{m\to\infty} l(Z_m)=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$ (=: Bogenlänge von $(x,f(x))$, $x\in[a,b]$).

(c) Berechne für $f(x)=\frac{x^2}{2}$ die Bogenlänge der Kurve $(x,f(x))$, $x\in[-1,1]$.

Hinweis

Verwende für (b) den 1. MWS der Differentialrechnung und den Riemannschen Zwischensummensatz.

Aufgabe 19 (5 Punkte)

Untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Existenz:

(a) $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx.$ (b) $\displaystyle\int_0^1\frac{\cos x}{x^2}\,dx.$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty\sin(x^2)\,dx.$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2|x|}\,dx.$ (e) $\displaystyle\int_0^c\sqrt{1-c^{-2}x^2}\,dx$ für $c>0$.

Berechne im Falle der Existenz möglichst den Integralwert.

Aufgabe 20 (2 Punkte)

Berechne für $a, b > 0$ den Flächeninhalt der Ellipse

$$\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\Big\}.$$

Aufgabe 21 (4 Punkte)

Untersuche die nachfolgenden Funktionenreihen bzw. -folgen auf punktweise sowie gleichmäßige Konvergenz auf dem jeweils angegebenem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Berechne möglichst die Grenzfunktion.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k^4 x)}{k^3},\ I = \mathbb{R}.$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k!},\ I = \mathbb{R}.$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^k},\ I = [0,1].$ (d) $f_n(x) = (1-x)x^n,\ I = [0,1].$

Aufgabe 22★ (Integralkriterium) (4 Punkte)

Es sei $f \in R[0,b]$ für alle $b > 0$. Ferner sei $f(x)$ nichtnegativ und monoton fallend auf $[0,\infty)$. Zeige, dass dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) \text{ existiert } \Leftrightarrow \int_0^{\infty} f(x)\,dx \text{ existiert.}$$